Der freie Fall – von der Stratosphäre bis zum Kuipergürtel

Christian Spreitzer, Baden und Evelyn Süss-Stepancik, Baden

Mediale Berichterstattungen liefern immer wieder auch für den Mathematikunterricht taugliche Themenfelder, der Stratosphärensprung von Felix Baumgartner und der Meteoriteneinschlag in Russland vom Februar 2013 sind zwei aktuelle Beispiele. Beide Phänomene lassen sich mit der Mathematik des freien Falls erschließen. Für die mathematische Beschreibung eines Stratosphärensprungs müssen Überlegungen zum Luftwiderstand im Allgemeinen und zur Atmosphärendichte im Speziellen angestellt werden. Für theoretische Betrachtungen zur möglichen Abwehr eines herannahenden Asteroiden genügen hingegen elementare trigonometrische Beziehungen. Die zwei Arbeitsblätter im Anhang begleiten unseren Unterrichtsvorschlag.

1 Einleitung

Als Felix Baumgartner am Sonntag, den 14. Oktober 2012, seinen Stratosphärensprung nach mehreren Verschiebungen endlich absolvieren konnte, sahen alleine in Österreich etwa 3 Millionen Menschen zu. Prominente Wissenschaftler, aber auch die „Science Busters[1]" kommentierten dieses Ereignis und informierten die Zuseher/innen mit Fakten beispielsweise zum aktuellen Druck in der Kapsel, zur Schallgeschwindigkeit, zum freien Fall und vielem mehr. Auch viele Schüler/innen verfolgten diese besondere Begebenheit mit Interesse und waren einige Male mit Begriffen aus ihrem Physik- und vielleicht auch Mathematikunterricht konfrontiert. Es liegt daher nahe, dieses und ähnliche Ereignisse aufgrund ihrer allgemeinen Bekanntheit im Mathematik- und/oder Physikunterricht aufzugreifen – ein Problem aus der Realität ist ja immer ein guter Ausgangspunkt für Modellierungen (vgl. Siller 2010). Zudem ermöglicht dieser Fall auch das Aufgreifen von Differentialgleichungen, welche in der Schule meist nur rudimentär in Form von einfachen Beispielen oder mitunter gar nicht behandelt werden. Gerade aber in der angewandten Mathematik sind Differentialgleichungen von immenser Bedeutung. Sie sind geradezu unumgänglich, wenn es gilt, (wie auch immer geartete) dynamische Vorgänge mathematisch zu beschreiben oder einigermaßen realistische Modelle zu behandeln und dabei das Terrain allzu großer Vereinfachung zu verlassen.

Wir wollen hier zeigen, wie dies im Mathematikunterricht der 12. Schulstufe gelingen kann.

2 Die notwendigen Einzelheiten verstehen

2.1 Der freie Fall mit Luftwiderstand

Für den Einstieg in die Modellierung bzw. Bearbeitung des Stratosphärensprungs bietet sich der freie Fall ohne Luftwiderstand (s. Arbeitsblatt 1) als erstes Näherungsmodell an, bei dem wir bewusst auf die Repräsentation vieler wichtiger Eigenschaften verzichten (vgl. Maaß 1990). Folgende Gründe sprechen dafür:

1. Die Schüler/innen haben mit der Formel $s(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ den freien Fall und damit verbundene Kontexte meist schon im Mathematik- und Physikunterricht bearbeitet – dies erlaubt also das Anknüpfen an Bekanntes und ermöglicht es auch, den benötigten Zusammenhang zwischen zurückgelegtem Weg, Geschwindigkeit und Be-

schleunigung wieder ins Gedächtnis zu rufen.

2. Aufbauend auf dieser sehr einfachen Formel kann dann nach dem *Prinzip vom Leichteren zum Schweren* (Comenius, zit. nach Vollrath/Roth 2012, S. 115) der freie Fall mit Luftwiderstand erarbeitet werden.

Der zweifellos interessante und den Schüler/innen wohl am wenigsten vertraute Ausdruck der Gleichung $ma = mg - kv^2$ (Fowles/Cassiday, 2004) die den freien Fall mit Luftwiderstand beschreibt, ist sicherlich der Proportionalitätsfaktor k, den es zu verstehen gilt. Diesem Faktor, dessen Größe von der Dichte der Atmosphäre und der Beschaffenheit – also der Angriffsfläche und Form – des fallenden Objekts abhängt, können sich Schüler/innen durchaus auch selbsttätig nähern. Dazu haben wir k in seine drei Bestandteile zerlegt, die nacheinander oder in Form eines Gruppenpuzzles (vgl. Barzel/Büchter/Leuders, 2011) betrachtet werden können.

Für die Betrachtung der Dichte der Atmosphäre nehmen wir zu Beginn eine Vereinfachung (Atmosphäre mit konstanter Temperatur) vor und arbeiten mit der barometrischen Höhenformel $\rho(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{h}{8400m}}$, wobei $\rho(h)$ die Dichte auf Höhe h ist und $\rho_0 = 1{,}2$ kg/m³ (s. Arbeitsblatt 1 – Aufgabe 2). Dass 1 m³ Luft auf einer Höhe von 40 km nur ~0,01 kg, auf einer Höhe von 10 km ~0,36 kg und auf einer Höhe von 1 km ~1,07 kg wiegt, kann von den Schülern/innen rasch berechnet werden und vermittelt sofort eine erste wesentliche Einsicht: Felix Baumgartner war bei seinem Sprung massiven Druckunterschieden ausgesetzt.

Die weiteren Überlegungen, dass der Faktor k direkt proportional zur Dichte $\rho(h)$ der Atmosphäre und zur Größe der Angriffsfläche A ist, ergeben sich mit den entsprechenden Fragestellungen (s. Arbeitsblatt 1) von selbst.

Nun muss nur noch der aus dem Gebiet der Aerodynamik stammende c_W-Wert (Böswirth, 2010) berücksichtigt werden, dessen Wert von der Form bzw. den aerodynamischen Eigenschaften des fallenden Objekts abhängt (s. Arbeitsblatt 1 – Aufgabe 2c). Auch hier gilt: der Faktor k ist direkt proportional zu c_W und insgesamt ist damit die Formel $k = \frac{c_W}{2} \cdot A \cdot \rho$ komplett.

Gemäß dem ersten Teil von Vollraths Paradoxie „*Man kann das Ganze nur verstehen, wenn man die Einzelheiten verstanden hat.* (Vollrath 1993) sind nun die Einzelheiten aufbereitet und das Reflektieren bzw. Zusammenfassen dieser kann und soll auch hier von den Schülern/innen selbst erfolgen.

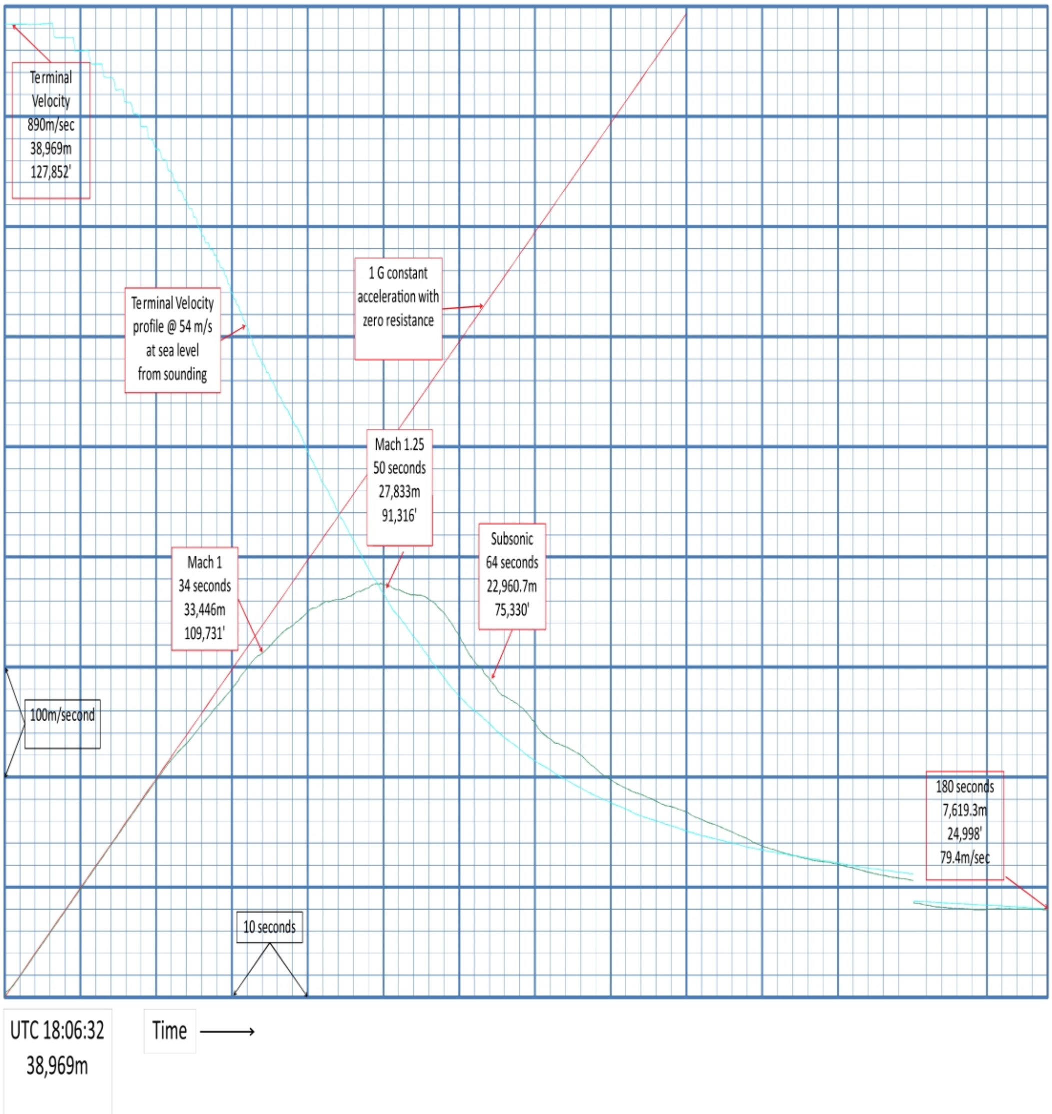

Abbildung 1 Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm des Stratosphärensprungs vom 14. 10. 2012

Mit Abbildung 1 (Red Bull Stratos Summary Report), welche

- die stationäre Geschwindigkeit („Terminal Velocity“), das ist jene Geschwindigkeit, bei der sich die Erdanziehungskraft und der Luftwiderstand aufheben,
- die tatsächliche Geschwindigkeit von Felix Baumgartner und
- die theoretische Geschwindigkeit im Vakuum – also die Gerade $v(t) = g \cdot t$

zeigt, wird jetzt auf real aufgezeichnete Daten beim Stratosphärensprung zurückgegriffen und eine tiefergehende mathematische Durchdringung dieses Phänomens kann erfolgen. Dabei muss zum einen die Darstellung als Ganzes, zum anderen müssen aber auch die Graphen mit ihren Einzelheiten – getreu dem zweiten Teil der Paradoxie „*Man kann die Einzelheiten nur verstehen, wenn man das Ganze verstanden hat.*“ (Vollrath, 1993) – erfasst werden. Neben dem Ablesen und Umrechnen (z. B. Mach in m/s) von Werten aus der obigen grafischen Darstellung ist es nötig, den mathematischen Zusammenhangs von Geschwindigkeit und Beschleunigung ($v' = a$) zu kennen. Zur Lösung der Aufgabe „Nimm an, dass Felix Baumgartner mit seinem Druckanzug rund 100 kg gewogen hat und berechne, welchen Wert der Proportionalitätsfaktor k (aus Aufgabe 2) beim Geschwindigkeitsmaximum des Sprungs gehabt hat!“ (s. Arbeitsblatt 1 – Aufgabe 3) gilt es, zu erkennen, dass im Geschwindigkeitsmaximum $a = 0$ gilt. Damit ergibt sich aus $ma = mg - kv^2$ ein Wert von ~ 2,377 kg/m für k.

2.2 Weiterführende Überlegungen zur Atmosphärendichte

Den meisten Schülern/innen wird wohl auf- sich, obigem Exponentialgesetz noch einige Aufmerksamkeit zu schenken. Dazu ziehen wir das in den 60er und 70er Jahren von der NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration), der NASA (National Aeronautics and Space Adminstration) und der USAF (United States Air Force) entwickelte

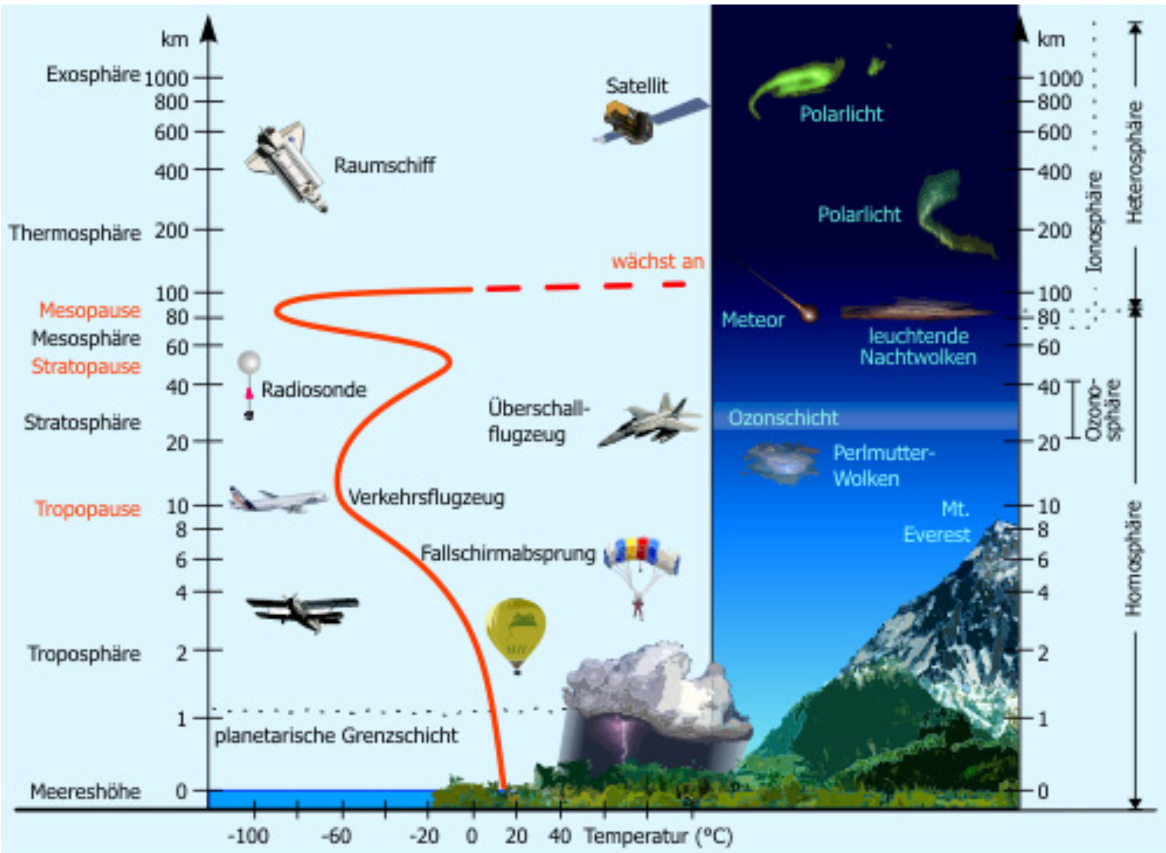

Abbildung 2 Temperaturverlauf in der Erdatmosphäre (kowoma.de)

grund ihrer eigenen Erfahrung beim Fliegen

bekannt sein, dass die Erdatmosphäre unterschiedliche Temperaturen aufweist, wie Abbildung 2 (kowoma.de) schematisch darstellt. Sie bildet den Ausgangspunkt der weiterführenden Überlegungen (s. Arbeitsblatt 2). Dass die Abnahme der Atmosphärendichte mit zunehmender Höhe entsprechend einem Exponentialgesetz $\rho(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{h}{h_S}}$ mit einer festen Skalenhöhe h_s nur für Bereiche gilt, in denen sich die Temperatur nicht stark ändert, ist eine weitere wichtige Information zur Bearbeitung des Stratosphärensprungs, die eventuell nicht bei allen Lernenden vorausgesetzt werden kann. Daher lohnt es mathematische Modell für die Erdatmosphäre (U.S. Standard Atmosphere, 1976) heran, das Referenzwerte für die Dichte in Abhängigkeit von der Seehöhe bei einer geografischen Breite von 45° und den dort durchschnittlich herrschenden atmosphärischen Bedingungen liefert (s. Arbeitsblatt 2 – Aufgabe 2) und betrachten die absoluten und relativen Unterschiede zwischen den Referenzwerten und den mit der Formel $\rho(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{h}{8400m}}$ mit $\rho_0 = 1{,}2$ kg/m³ ermittelten Werten.

Seehöhe in km	0	1	2	3
Referenzwert	1,225	1,1117	1,0066	0,90925

$\rho(h)$	1,2	1,06531863	0,945753153	0,839607045
	…	…	…	…
	37	**38**	**39**	**40**
	0,0062355	0,0053666	0,0046268	0,0039957
	0,014662818	0,013017145	0,011556172	0,010259171

Die absoluten Unterschiede sind natürlich sehr klein, sie liegen zwischen -0,0747 kg/m³ und ~ 0,0229 kg/m³. Die relativen Unterschiede hingegen sind enorm. Auf einer Höhe von 40 km beträgt der Referenzwert 0,0039957 kg/m³, das sind nur rund 39% des mit $\rho(h)$ ermittelten Werts, der 0,010259171 kg/m³ ist. Damit wird also rasch deutlich, dass das angenommene Exponentialgesetz im Bereich der Stratosphäre sehr ungenaue Ergebnisse bringt und daher eine Exponentialfunktion gesucht wird, die für jenen Bereich bessere Werte – mit kleineren relativen Unterschieden – liefert (s. Arbeitsblatt 2 – Aufgabe 2b). Es genügt an dieser Stelle, wenn Schüler/innen eine solche Exponentialfunktion durch Probieren bzw. Experimentieren (in der Tabelle oder mit Schiebereglern) eruieren.

Um über einen die Troposphäre und Stratosphäre umfassenden Bereich ein realistisches Modell der Atmosphärendichte zu erhalten, würde sich die Konstruktion einer entsprechenden Dichtefunktion durch Interpolation der tabellierten Werte der US-Standardatmosphäre eignen. Hierfür ist der Einsatz von Technologie, sei es eine Tabellenkalkulation oder ein Computeralgebrasystem, unbedingt notwendig. Eine Interpolation mittels kubischer Splines[2] ist besonders gut geeignet, doch auch ein exponentielles Modell (s. Arbeitsblatt 2) liefert schon brauchbare Ergebnisse.

2.3 Aufstellen der Differentialgleichung

Ausgehend von der Formel $ma = mg - kv^2$ und der auf dem Arbeitsblatt 1 diskutierten Gestalt des Faktors k bietet es sich an, die Schüler/innen mit dem Problem der Berechnung von Felix Baumgartners Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit zunächst auf rein qualitativer Ebene zu konfrontieren. Unmittelbar nach Verlassen der Kapsel ist Felix Baumgartner quasi im freien Fall und seine Geschwindigkeit nimmt entsprechend der Formel $v(t) = g \cdot t$ zu. Mit zunehmender Geschwindigkeit und abnehmender Höhe wird aber auch der Luftwiderstand größer – einerseits wegen des Faktors v^2 und andererseits wegen der Proportionalität von k zur Atmosphärendichte. Die Beschleunigung wird also kleiner und die Geschwindigkeitszunahme erfolgt langsamer. Irgendwann wird der Term kv^2 die Gravitationskraft mg ganz kompensieren und die Geschwindigkeit nicht weiter zunehmen – sie wird von nun an sogar wieder abnehmen, da die Atmosphärendichte und damit der „Bremsfaktor" k immer größer wird, je näher Felix Baumgartner der Erdoberfläche kommt. Nach dieser qualitativen Überlegung lässt sich die Geschwindigkeits-Zeit-Kurve bereits schematisch zeichnen – die Geschwindigkeit steigt zunächst linear, dann zunehmend langsamer, erreicht ein Maximum und nähert sich dann asymptotisch der stationären Geschwindigkeit. In der Folge sollte mit den Schülern/innen auf die wesentlichen Probleme beim Versuch einer mathematisch exakten Beschreibung eingegangen werden – die zeitliche Änderung der zu ermittelnden Größe hängt von deren momentanem Wert ab – hinter der Gleichung $ma = mg - kv^2$ verbirgt sich eigentlich die (Integro-)Differentialgleichung $m\dot{v} = mg - kv^2$ bzw. die Differentialgleichung $m\ddot{s} = mg - \frac{c_W}{2} \cdot A \cdot \rho(s)\dot{s}^2$. Neben der gesuchten Funktion selbst kommen in dieser Gleichung also auch (Integrale bzw.) Ableitungen der Funktion vor. Zwar kann im Unterricht schon aus zeitlichen Gründen wohl kaum besonders tief in die Theorie der Differentialgleichungen eingedrungen werden, die wesentliche Eigenschaft eines Vorgangs, die zu einer Beschreibung als Differentialgleichung führt, kann aber zumindest im Kontext zeitlich veränderlicher Größen durchaus von Schülern/innen erfasst werden – eine Größe, deren zeitliche Änderungsrate von ihrem momentanen Wert abhängt, lässt sich als Lösung eine Differentialgleichung beschreiben – also einer Gleichung, in der neben der zu ermittelnden Größe selbst auch deren Ableitungen auftreten.

3 Lösen der Differentialgleichung des freien Falls mit Luftwiderstand

Das numerische Lösen der Differentialgleichung des freien Falls mit höhenabhängiger Atmosphärendichte geht zwar etwas über den Schulstoff hinaus, doch findet sich gerade darin viel Potential für schöne Erfolgserlebnisse der Schüler/innen, wenn etwa die berechneten Lösungskurven mit dem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm aus der realen Daten vom Stratosphärensprung (s. Abb. 1) verglichen werden. Hier bietet es sich an, ein elektronisches Arbeitsblatt in Excel oder einem Computeralgebrasystem wie Mathcad vorzubereiten, in welchem ein numerischer Lösungsalgorithmus bereits implementiert ist und die Schüler/innen lediglich die Anfangsdaten sowie die von ihnen ermittelte Dichtefunktion $\rho(h)$ eingeben müssen.

3.1 Implementierung in PTC Mathcad Prime 2.0

Als Beispiel sei im Folgenden eine in PTC Mathcad Prime 2.0 erstellte Lösung vorgestellt. Dividiert man die Differentialgleichung $m\ddot{s} = mg - \frac{c_W}{2} \cdot A \cdot \rho(s)\dot{s}^2$ durch m, so erhält man $\ddot{s} = g - \frac{c_W}{2m} \cdot A \cdot \rho(s)\dot{s}^2$. Die Erdbeschleunigung g kann auch für Sprünge aus der Stratosphäre noch als konstant angenommen werden, da die Absprunghöhe von 40 km viel kleiner als der Erdradius ist. Für die Dichte $\rho(h)$ kann sowohl die von den Schülern/innen ermittelte Exponentialfunktion als auch die aus den tabellierten Werten der US-Standardatmosphäre erzeugte Interpolationsfunktion herangezogen werden. Um den noch verbleibenden Faktor $\frac{c_W}{2m} \cdot A$ zu bestimmen, bedient man sich desselben Tricks wie bei der Berechnung des Faktors k auf Arbeitsblatt 1 (Aufgabe 3). Im Geschwindigkeitsmaximum ist die Beschleunigung null, somit kann der Wert von $b := \frac{c_W}{2m} \cdot A$ bei Felix Baumgartners Stratosphärensprung unmittelbar aus den Daten für den Punkt der erreichten Maximalgeschwindigkeit und der Dichte $\rho(h)$ berechnet werden.

Zur numerischen Lösung der Differentialgleichung kann ein Runge-Kutta-Verfahren mit fixer Schrittweite verwendet werden. Zunächst werden Anfangs- und Endzeit sowie die Zahl der Schritte festgelegt.

$$t_a := 0 \qquad t_e := 350 \qquad N := 40000$$

Die Differentialgleichung muss noch in ein System 1. Ordnung umgeschrieben werden und kann nach Wahl von Anfangsdaten numerisch gelöst werden.

$$init := \begin{bmatrix} 38969.4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D(t, Y) := \begin{bmatrix} Y_1 \\ -g_0 + b \cdot \rho\left(Y_0\right) \cdot Y_1^{\,2} \end{bmatrix}$$

$$Z := \mathrm{rkfixed}\left(init, t_a, t_e, N, D\right)$$

Abbildung 3 zeigt den so erhaltenen Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf $Z^{\langle 2 \rangle}(t)$ für eine Dichtefunktion $\rho(h) = 1{,}85 \cdot e^{-\frac{h}{6400m}}$ kg/m³ (als Beispiel für eine von Schülern/innen empirisch ermittelte Exponentialfunktion – s. Arbeitsblatt 2). Außerdem ist der Verlauf der Schallgeschwindigkeit c_S eingezeichnet.[3] Die dargestellten Datenpunkte sind die Originaldaten aus dem Summary Report (s. Arbeitsblatt 1).

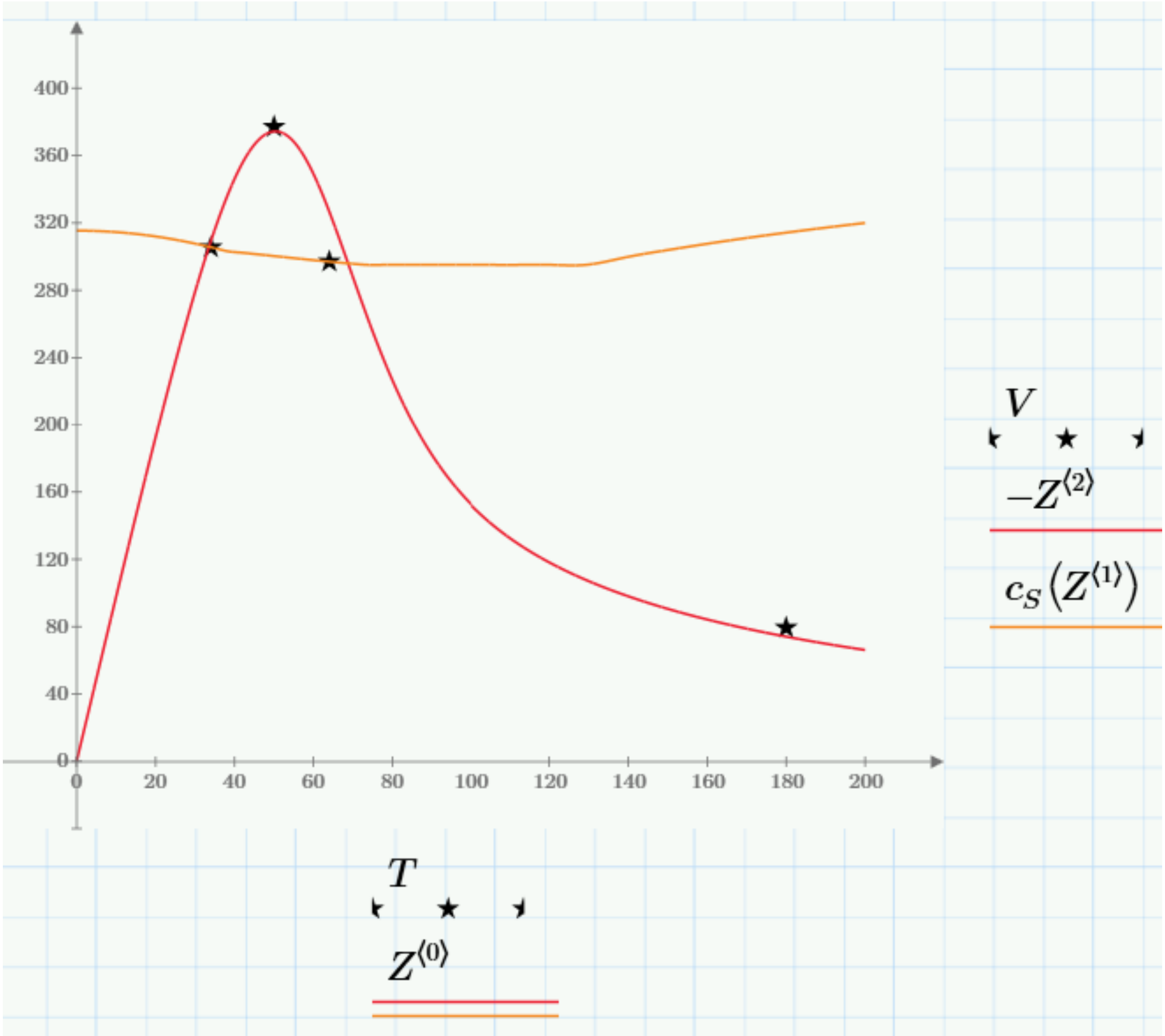

Abbildung 3 Berechnete Geschwindigkeits-/Zeit-Kurve des Stratosphärensprungs

Man sieht eine sehr gute Übereinstimmung der berechneten Kurve mit den realen Datenpunkten, vor allem können die Schüler/innen mit anderen Anfangsbedingungen experimentieren und z.B. Sprünge aus noch größerer oder geringerer Höhe simulieren und die jeweils erreichten Maximalgeschwindigkeiten miteinander vergleichen. Das Modell kann noch weiter verfeinert werden:

- Anstelle der exponentiellen Atmosphärendichtefunktion könnte $\rho(h)$ auch durch Spline-Interpolation der US-Standardatmosphärenreferenzwerte konstruiert werden.
  Dadurch bekäme man ein über den gesamten Bereich von 0 km bis 40 km gültiges Modell.
- Das abrupte Ansteigen des c_W-Werts bei Überschreiten der Schallgeschwindigkeit (vgl. Bailey, Hiatt, 1971) könnte durch eine geschwindigkeitsabhängige Funktion $c_W(v)$ in der Modellierung berücksichtigt werden.
- Die sich während des Sprungs verändernde Körperhaltung Felix Baumgartners kann mittels einer dimensionslosen Funktion der Zeit, die als zusätzlicher Faktor in den Koeffizienten b eingeht, berücksichtigt werden.

Das Problem „Felix Baumgartner“ wäre damit zur Genüge behandelt. Der interplanetare Raum hingegen hält noch weitere fallende Körper für uns bereit. Mit geringem mathematischen Aufwand lassen sich grundlegende Erkenntnisse der Himmelsmechanik verstehen.

4 Von der Stratosphäre bis zum Kuipergürtel

Was unterscheidet nun einen Fallschirmspringer oder einen Meteoriten, die „auf die Erde fallen", von einem Satelliten oder der Internationalen Raumstation, die „um die Erde kreisen"? Der Unterschied besteht alleine in der Größe der Tangentialgeschwindigkeit bezüglich des Erdmittelpunkts (bei Vernachlässigung des Luftwiderstands). Satelliten fallen genauso zur Erde wie Felix Baumgartner bei seinem Stratosphärensprung. Sie fallen nur immer an der Erde vorbei. Hätte Felix Baumgartner beim Verlassen des Ballons eine ausreichend große tangentiale Geschwindigkeitskomponente erreicht, etwa mithilfe eines Raketenanzugs, dann wäre er nicht zur Erde zurückgekehrt, sondern würde noch immer die Erde umrunden. Was für eine interessante Vorstellung!

4.1 Umlaufbahnen

Bereits Isaac Newton hat erkannt, dass eine Kanonenkugel, wenn sie nur mit ausreichend hoher Geschwindigkeit abgefeuert würde, niemals auf der Erde aufschlagen, sondern diese ewig umrunden oder gar sich immer weiter von ihr entfernen würde (Tipler, 1994). Natürlich hat Newton hier bewusst den Luftwiderstand vernachlässigt, der ja stets bremsend wirkt und zu einer kontinuierlichen Geschwindigkeitsabnahme führt. Prinzipiell ist seine Überlegung aber völlig korrekt. Es ist auch gar nicht schwer, auszurechnen, wie schnell eine Kanonenkugel sein muss, um in eine Erdumlaufbahn zu gelangen (die „erste kosmische Geschwindigkeit").

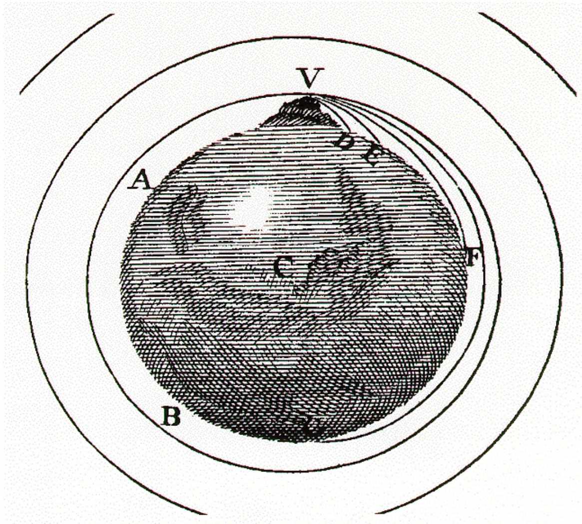

Abbildung 4 Newtons Kanone (Newton, ca. 1680)

Dazu kann folgende Aufgabe gelöst werden:

Stell dir vor, du schleuderst einen an einer Schnur befestigten Tennisball im Kreis (deine Hand ist der Mittelpunkt). Um den Tennisball auf einer Kreisbahn zu halten, musst du eine zum Mittelpunkt gerichtete Kraft auf den Ball ausüben (die Zentripetalkraft), du musst also an der Schnur „ziehen". Genauso zieht die Erde durch ihre Gravitationskraft an den sie umkreisenden Körpern. Daher ist hier die Gravitationskraft $\frac{G \cdot m \cdot M}{r^2}$ gleich der Zentripetalkraft $\frac{mv^2}{r}$ ($G = 6{,}67384 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$ ist die Newtonsche Gravitationskonstante, $M = 5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg die Erdmasse, r der Abstand zum Erdmittelpunkt und v die tangentiale Geschwindigkeit des Körpers).

- Berechne die erste kosmische Geschwindigkeit sowie die Bahngeschwindigkeit und Umlaufzeit eines geostationären Satelliten.

  Radius des Erdäquators: 6378 km (der Radius des Erdäquators)

  Radius der Bahn eines geostationären Satelliten: 42164 km

- Kannst du erklären, warum Satelliten, die der Erddrehung folgend die Erde in einer Höhe von etwa 35786 km über dem Äquator (= 42164 km − 6378 km) umrunden, geostationär genannt werden?

4.2 Asteroiden, Meteoriten, Kometen – eine abwendbare Gefahr?

Untersucht man die Bewegung eines Körpers im Gravitationsfeld eines viel schwereren Körpers (etwa der Mond im Schwerefeld der Erde oder die Erde im Schwerefeld der Sonne) und können die gravitativen Einflüsse anderer Körper weitgehend vernachlässigt werden, dann spricht man vom sogenannten Keplerproblem. Johannes Kepler hat gezeigt, dass als mögliche Bahnen des leichteren Körpers nur Kegelschnitte, also Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln in Frage kommen (Keplerbahnen). Der Mond bewegt sich auf einer Ellipse um die Erde, die acht Planeten unseres Sonnensystems bewegen sich auf Ellipsenbahnen um die Sonne. Doch es gibt noch viel mehr Objekte auf Umlaufbahnen um die Sonne, etwa Zwergplaneten, Asteroiden und Meteoriden. Die meisten Meteoriden und Asteroiden im Sonnensystem finden sich im Asteroidengürtel zwischen den Bahnen von Mars und Jupiter sowie im sogenannten Kuipergürtel jenseits der Neptunbahn. Der Kuipergürtel enthält Zehntausende Asteroiden mit mehr als 100 km Durchmesser. Kollidiert einer davon mit der Erde, hätte dies verheerende Auswirkungen auf die Biosphäre. Der letzte größere Meteoriteneinschlag in Russland im Februar 2013 hat rund 1200 Menschen verletzt (www.welt.de). Solche Ereignisse sind aber zum Glück sehr selten. Falls aber doch ein Asteroid auf Kollisionskurs mit der Erde ist, kann seine Bahn theoretisch noch beeinflusst werden, wenn er rechtzeitig entdeckt wird. Sowohl die amerikanische als auch die europäische Raumfahrtagentur entwickeln Konzepte, um im Ernstfall einen Asteroiden ablenken zu können. Eine der vielversprechendsten Vorschläge ist die Fokussierung von Sonnen- oder Laserlicht auf den Asteroiden. Dabei verdampfen Teilchen auf der Oberfläche des Asteroiden. Dies führt dann zu einer kleinen Richtungsänderung des Asteroiden. Geschieht dies in ausreichender Entfernung von der Erde, dann kann eine Kollision noch abgewendet werden. Sobald dies technisch möglich ist, gilt es nur noch, den Asteroiden rechtzeitig zu entdecken, was aber sehr unwahrscheinlich ist, wie mit der nächsten Aufgabe nachvollzogen werden kann.

Aufgabe: Vor ca. 65 Millionen Jahren entstand der Chicxulub-Krater (170 km Durchmesser) auf der Halbinsel Yucatan (Mexiko) durch den Einschlag eines vermutlich etwa 10 km großen Eisenasteroiden. Dieser Einschlag hat das Klima auf der Erde so stark verändert, dass es zu einem Massensterben kam. Nimm an, dass sich der Eisenasteroid mit rund 30000 km/h direkt auf die Erde zubewegt hat. Angenommen, die Richtung des Geschwindigkeitsvektors des Asteroiden lässt sich mit einem im Weltraum postierten Laser um 0,00005° verändern.

- In welcher Entfernung von der Erde hätte man diesen Asteroiden spätestens entdecken müssen, um seine Kollision mit der Erde noch zu verhindern (der Erdradius am Äquator beträgt 6378 km)?
- Wie viele Tage vor dem Einschlag hätte die letztmögliche Ablenkung des Asteroiden stattfinden müssen?

5 Epilog

Wir haben nun Raum und Zeit mit verschiedenen mathematischen Methoden durchwandert und erkannt: „Die Welt ist alles, was der Fall ist.“ (Wittgenstein, 1922)

Von der Stratosphäre zum Kuipergürtel, vom Aussterben der Dinosaurier zur Gegenwart – Aufgabenstellungen rund um den freien Fall machen es möglich, räumliche und zeitliche Distanzen zu durchschreiten. Dabei benötigen wir nicht mehr als Formeln, Funktionen, einfache trigonometrische Beziehungen und für die Berücksichtigung des Luftwiderstands Grundkenntnisse von Differentialgleichungen, deren Lösung wir der Technologie überlassen (können).

Literatur

Bailey A. B., Hiatt J., Free-flight measurements of sphere drag at subsonic, transonic, supersonic, and hypersonic speeds for continuum, transition and near-free-molecular flow conditions, Von Karman Gas Dynamics Facility, Arnold Engineering Development Center, Air Force Systems Command, Arnold Air Force Station, Tennessee, 1971.

Barzel, B.; Büchter, A.; Leuders, T. (2011). *Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Böswirth, L., *Technische Strömungslehre* (2010). Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden.

Fowles, G. R.; Cassiday, G. L. (1998). *Analytical Mechanics*, Saunders Golden Sunburst Series.

Kowoma; A. Köhne, M. Wößner; http://www.kowoma.de/gps/zusatzerklaerungen/atmosphaere.htm (19. 6. 2013)

Maaß, J. (1990). Mathematische Technologie = sozialverträgliche Technologie? Zur mathematischen Modellierung der gesellschaftlichen „Wirklichkeit" und ihren Folgen. In. R. Tschiedel (Hrsg.), *Die technische Konstruktion der gesellschaftlichen Wirklichkeit*, München: Profil-Verlag.

National Oceanic and Atmospheric Administration, National Aeronautics and Space Administration, United States Airforce, *U.S. Standard Atmosphere* (1976), NASA-TM-X-7433b.

Newton, I., *A Treatise of the System of the World (ca. 1680).*

Red Bull Stratos Summary Report (2013). *Findings of the Red Bull Stratos Scientific Summit*; California Science Center, Los Angeles.

Siller, H.-S. (2010). Modellbilden – Ein Thema für den fächerübergreifenden Unterricht. In: *Der Mathematikunterricht – Beiträge zu seiner fachlichen und fachdidaktischen Gestaltung*, *4*, 28–32.

Tipler, P. (1994). *Physik*. Spektrum akademischer Verlag.

Trieloff, M. (2008), Häufigkeit der Einschläge von Kometen und Asteroiden: Quantifizierbares Risiko, Präsentation im Studio der Villa Bosch, Heidelberg, 13. 11. 2008.

Vollrath, H.J. (1993). Paradoxien des Verstehens von Mathematik. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 14, 3/4, 35–38.

Wittgenstein, L (1922). Tractus logicus-philosophicus.

Anmerkungen

[1] „Science Busters" sind ein österreichisches Wissenschaftskabarett.
http://de.wikipedia.org/wiki/Science_Busters

[2] Ein Spline n-ten Grades ist eine stückweise aus Polynomen (höchstens) n-ten Grades zusammengesetzte Funktion. An den Nahtstellen werden Anschlussbedingungen gestellt, etwa dass der Spline (n-1)-mal stetig differenzierbar ist. Für n = 1, 2, 3 spricht man von linearen, quadratischen bzw. kubischen Splines. Die meisten Computeralgebrasysteme verfügen über Befehle, die es erlauben, die Interpolationsfunktion dergestalt zu konstruieren, dass sie direkt in den Koeffizienten einer numerisch zu lösenden Differentialgleichung verwendet werden kann.

[3] Dass Felix Baumgartner bei seinem Stratosphärensprung die Schallgeschwindigkeit überschreitet, war ein wesentliches Ziel des Projekts. Die Schallgeschwindigkeit in Gasen ist eine Funktion der Temperatur und ändert sich deshalb während des Falls. Die dargestellte Schallgeschwindigkeitskurve entstand durch Interpolation der tabellierten Werte der Schallgeschwindigkeit für die US- Standardatmosphäre.